Title	トロイトラインの「幾何学的直観教授」の認識論的背景
Author(s)	山本，信也
Citation	熊本大学教育学部紀要 人文科学，49：201-213
Issue date	2000-12-15
Type	Departmental Bulletin Paper
URL	http://hdl.handle.net/2298/1151
Right	

熊本大学教育学部紀要，人文科学
第49号，201－213，2000

トロイトラインの「幾何学的直観教授」の認識論的背景

山 本 信 也

Cognitive Basis of Treutlein's Geometrical Intuitive Instruction

Shinya YAMAMOTO

（Received September 1, 2000）

はじめに

小倉・鍋島の『現代数学教育史』（1957）によれば，1905年オーストリアのメラン（Meran）で開催された「ドイツ自然科学者・医者協会」（die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte）の総会で数学・自然科学教育に関する改革案が決議された．ここで決議された改革案は，一般に「メランの要目」あるいは「メランの提案」と呼ばれているが[16]，正式名称は，「数学及び自然科学教育の改革案」(Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht)である．その中で数学科に関連するのは「9年制中等学校に於ける数学教育に関する報告」（Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höhren Lehranstalten）である[15]．小倉金之助の数学教育史研究で「メランの要目」と称されているのは，その報告の中に示されている「ギムナジウムの数学教授要目」（Mathematischer Lehrplan für die Gymnasien）である[14]．本稿では誤解を避けるため，「9年制中等学校に於ける数学教育に関する報告」自体を簡単に「メランの要目」と略称することにする．1908年に9年制中等学校の数学科教科書として出版された『現代的観点に基づく数学教科書』（*Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen*）[1] は，この要目の基本的考え方を具体化した教科書であった．いわば「メランの要目」とこの新しい教科書はドイツの数学教育改造運動の具体的成果である．

『現代的観点に基づく数学教科書』は低学年用，高学年用の2巻からなり，上巻は大正4年，下巻は5年に『新主義数学』（森外三郎訳）という名称で文部省から出版されている[2]．大正10年当時東北大学の数学教授であった林鶴一は《コハ（『新主義数学』）我ガ数学教育界ニ既ニ行キ渉レル参考書ニシテ，斯界を稗益スルコト実ニ大ナルモノアリ．我等斯界ニアルモノハ文部省，延ヒテハ森外三郎氏ニ対シテ満腔ノ感謝ヲ表セザルベカラザルナリ》[3] と述べ，当時海外の新しい数学教育を代表する教科書として迎えられた．またこの教科書のタイトルとなった「新主義数学」という用語は，大正7年12月に開催された全国師範学校中学校高等女学校数学科教員協議会における「幾何学入門」の議論の中にも登場し[20]，大正・昭和初期の幾何教授改善の議論と実践の際に参考とされた教科書であった[23]．

このように「メランの要目」やその具体化である『新主義数学』は，大正・昭和初期のわが国においては新しい数学教育として注目されたが，一方，ドイツでは「メランの要目」に対して真っ向から批判を行った人物がいた．それは，当時ドイツで中等学校幾何教授の改善を精力的に進めていたトロイトライン（P. Treutlein，1845-1912）である．

1911年にトロイトラインが出版した『中等学校の二段階からなる幾何教授の下段階としての幾何学的直観教授』(*Die geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen goemetrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen*)(17) には中等学校の初期の2～3年間（学齢11歳から13歳）の幾何教授が具体的な指導過程ととも示されている．同書は大正9年，『小学校並び中等学校初年級に於ける直観的空間教授』（北川久五郎訳，南光社）として日本語訳され(18)，国元東九郎（女子学習院）の「直観幾何教授」に影響を与えた(12)　．

中等学校の幾何教授の改善についてのトロイトラインの基本的主張は，中等学校の幾何教授を二段階に分けて行うという点にある．その低学年の幾何教授をトロイトラインは「幾何学的直観教授」(der geometrische Anschauungsunterricht）と呼び，彼の努力はここに向けられた．「幾何学的直観教授」でとりわけ重視されたのが「空間的直観能力」(das räumliche Anschauungsvermögen）の養成であった．その指導過程では多種多様な教具が使われている．特に意図的に作成された立体模型の使用が特徴的である．本稿では，「メランの要目」に対するトロイトラインの批判を取り上げ，「空間的直観能力」の養成に対する基本的な方針を明らかにし，そのことを通して「幾何学的直観教授」の認識論的背景を考察する．敷衍して言えば，「空間的直観能力」を養成する際に身の回りの具体物ではなく，立体模型が多用されたのか．この問題を認識論的観点から考察することが本稿の課題である．

以下では，まず「メランの要目」の幾何教授の指導方針と指導事項を明らかにする（Ⅰ)．トロイトラインが「メランの要目」に対して批判的であったのは，特にその第Ⅴ学年（学齢11歳）に配当された「予備的空間科」(Propädeutische Raumlehre）である．これに対してどのような批判を行ったかを明らかにする（Ⅱ)．「メランの要目」に対するトロイトラインの批判は，その理念ではなく，その指導内容及び方法に向けられている．その批判内容を検討することによって，「空間的直観能力」の養成に対するトロイトラインの基本的な方針を明らかにし，「幾何学的直観教授」の認識論的背景を考察する（Ⅲ)．

Ⅰ 「メランの要目」に於ける幾何教授

1．「空間科」の各学年の指導内容

1905年の「ドイツ自然科学者・医者協会」で決議された「数学及び自然科学教育の改革案」の中で数学科に関するのもは「九年制中等学校に於ける数学の授業に関する報告」である．この中に「ギムナジウムの数学教授要目」が示されており，従来数学教育史研究ではこの部分が「メランの要目」と呼ばれてきた(14)．そこには第Ⅵ学年（学齢10歳）から第Ⅰ学年（学齢18歳）の各学年にわたって数学科の指導事項が示されている．その各学年の指導事項は，「計算」(Rechnen)，「算術」(Arithmetik)，「予備的空間科」(Propädeutische Raumlehre)，「空間科」(Raumlehre）の4項目ごとに示されおり，その指導事項を大まかに分類すれば，算術・代数的指導事項と幾何的指導事項の2つである．なお黒田稔（1914)，林鶴一（1921)，小倉金之助（1957)，丸山哲郎（1972）が訳出している「メランの要目」では「幾何」という訳語が用いられているが，各学年の項目の原文には「幾何」に相当する“Geometrie”という用語はなく，“Raumlehre”となっている．本稿ではこれを「空間科」と訳した．各学年の「空間科」の指導事項の部分を訳出したのが資料1である．なお，カッコ内の学齢は原文にはないが，便宜上付け加えた．

資料 1.「ギムナジウムの数学教授要目」に於ける「空間科」の指導事項

第Ⅴ学年（Quinta　学齢 11 歳）

予備的空間科（Propädeutsche Raumlehre）

空間直観のための基本概念の導入．ただし，空間は平面幾何的な関係を具現化するものとして扱う．空間の広がり，面，線および点を，まず身のまわりの事物と関係づけながら説明し，そのあと種々の立体について確認する．平面図形は，最初は立体の境界の一部として扱い，その後個別的な対象として扱う．それに基づいて方向の概念，角の概念，平行の概念および対称の概念を理解させる．定木とコンパスを使う練習．たえず作図や実測を行うこと．

第Ⅳ学年（Quarta　学齢 12 歳）

空間科（Raumlehre）

直線，角，三角形．図形の可動性，三角形の各要素の依存関係およびその特別な場合（直角三角形，正三角形，二等辺三角形）．作図による平行四辺形についての簡単な定理．

第Ⅲ U 学年（Untertertia　学齢 13 歳）

空間科（Raumlehre）

平行四辺形の理論の拡張．台形．円に関する基本的な定理．図形の各要素の大きさや位置の変化がその図形全体に及ぼす影響についての考察．指導の過程に関連した作図，ただし特別な工夫をしなければならない作図は除く．

第Ⅲ O 学年（Obertertia　学齢 14 歳）

空間科（Raumlehre）

やや複雑な直線図形の面積の比較およびその面積を計算で求めること．曲線で囲まれた領域の面積の近似計算．第Ⅴ学年（Quinta）で扱った体積の計算の繰り返し．および第」Ⅲ U 学年（Untertertia）と同じような課題．

第Ⅱ U 学年（Untersekunda　学齢 15 歳）

空間科（Raumlehre）

相似の位置に着目した相似の理論．円に於ける比例．円を多角形で近似して円周の長さと円の面積の近似値を求めること．三角形，特に直角三角形の各辺の比と角の関係についての詳細な考察．実際的な問題に関連させて（測量用平板を利用して），各辺の比を表に表して吟味する（三角法への準備として）．

第Ⅱ O 学年（Obersekunda　学齢 16 歳）

空間科（Raumlehre）

平面幾何と関連した三角法．三角形や四角形の測量への実際的な応用．角の変化，函数の変化の依存関係を三角法の形式で特徴づけること，およびこの依存関係をグラフで表現する．作図や計算を使って適当な課題を種々の方法で解く．平面幾何学の最後として，調和点列や現代幾何学の基礎について触れる．

第Ⅰ U 学年（Unterprima　学齢 17 歳）

空間科（Raumlehre）

射影幾何学の基本的なことがらを考慮しながら立体幾何学を扱う．立体幾何学に於ける作図の練習．球面三角法の簡単な定理．地図投影法の理論を含んだ数理地理学．

第ⅠO学年（Oberprima　学齢18歳）
1. 円錐曲線の解析的および総合的扱いと天文学へのその応用．
2. これまでの数学の学習全般の復習．できれば計算や作図を伴う多くの問題を与える．
3. これまで学んできた数学について歴史的および哲学的観点からの回顧．

（下線部は引用者）

これによれば，科目として「空間科」が配置されているのは，第Ⅳ学年（Quarta　学齢12歳）からであり，最初の第Ⅵ学年と次の第Ⅴ学年では正式な科目とはなっていない．しかし資料1によって分かるように第Ⅴ学年には，後の学年の準備ともいえる「予備的空間科」（Propädeutische Raumlehre）がある．当時としてみれば，これは新しい科目であり，低学年の幾何教授のあり方を提案したものとして注目される．トロイトラインの「幾何学的直観教授」もその期間や指導内容は異なるが，ここに示された「予備的空間科」と基本的には同じ発想の低学年の幾何教授である．しかしながら，ここに示された「予備的空間科」の指導内容及び方法についてはトロイトラインはかなり批判的である．そこで，以下ではまずこの部分を詳しく見ることにする．

2.「予備的空間科」の指導方針

「9年制中等学校に於ける数学教育に関する報告」には，9年制ギムナジウムの各学年の指導事項のみではなく，低学年の幾何教授の補足説明が示されている(15)．まずこれに注目してその指導方針を明らかにしておこう．

資料2　低学年の「幾何教授」についての説明

《幾何教授は，本来の直観力に関連づけながら，実際的な測定から始めるべきである．自明と思われることを，ことさら厳密に証明し，生徒の理解から遠ざけてはならない．むしろ論理的証明を行う際には，その必要性が自然に意識されるように努めなければならないと同時に，このような配慮は順次行っていかなければならない．たとえば図形の合同条件は，実際的な作図の当然の帰結として，その必然性が理解されるように導くべきである．間接証明はできるだけ避けるべきであり，また証明された命題の逆は，それが容易に理解される場合――ほとんどの場合はそうであるが――，自明なものとして扱うべきである．作図の場合，斜線を入れたり，色を塗ったりして，図形全体の特徴が理解できるようにすることを第一に考え，二次的なことや，事細かなことで生徒の理解が妨げられないようにすべきである．平面図形を扱う場合，三次元の空間内に於ける関係と関連づける必要がある．また現実から適切な直観的な事例を取り上げることは特に重要であり，また模型を使用すべきである.》(15)，S. 550

特にここで問題とされているのは，定理の証明の扱いである．与えれた図形の実測を重視しつつ，厳密な証明を避けるべきであるというのがの趣旨であった．三角形の合同条件については従来のように厳密な証明を行うことなく，合同な三角形の作図を通して帰納的に導く．生徒に容易に理解される定理の逆は証明は行わず自明なものとして扱うことなど具体的な留意点が示されている．さらに平面図形を扱う際には，三次元空間内の関係も考慮に入れ，具体的な事物や立体模

型の使用も強調されている．

以上のように，従来定理として扱った命題のいくつかを証明の対象とせず，実測などを通して帰納的に導き，また平面図形のみならず空間図形も視野に入れつつ指導を行うというのが低学年の指導方針であった．これは中等学校の幾何教授の大きな方向転換を意味するものである．この方針はどのような幾何教授全体の理念と関連しているのだろうか．「メランの要目」に示された新しい数学科の理念とは何であったか，以下考察しておこう．

3.「空間科」の目標

「数学及び自然科学教育の改革案」に掲載されている「9年制中等学校に於ける数学教育に関する報告」の冒頭には中等学校数学科全般について述べた部分がある．そこには9年間の数学教育の方針と言うべき内容が述べられている．これに着目しながら「空間科」の目標について考察する．

資料3　ギムナジウムの九年間の数学科の方針

《さらに，数学の形式陶冶的な意義は従来通り認めつつ，一面的で実際的な意味をもたない特別な知識のすべてを放棄し，それに代えて我々を取り巻く現実的な世界を数学的に観察する能力を可能なかぎり発展させることが重要である．これより二つの特別な課題が浮かび上がってくる．すなわち空間的直観能力（das raumliche Anschauungsvermögen）を強化することと関数的思考（das funktionale Denken）の習慣を育成することである．その際，論理的訓練という数学教育固有の課題が損なわれることはないであろう．むしろ，先程述べた数学教育の方針を推し進め，生徒たちが興味をもって自らの論理的思考能力を活用できる領域と数学の内容とを密接に関連づけさえすれば，この論理的訓練という課題はうまく達成されるはずである．》[15]，S. 543-544

これによれば，中等学校の数学科の理念が大きく変化していることが確認できる．すなわち，「我々を取り巻く現実的な世界を数学的に観察する能力を可能なかぎり発達させる」（die Fähigkiet zur mathematischen Betrachung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwickung zu bringen）ことが主要な目標とされている．このことを達成するために「空間的直観能力」の強化と「関数的思考の習慣」の育成が重視された．したがって，この改革案では「空間的直観能力」の養成は，重要な課題の一つであったことが分かる．

資料1に示したように，第V学年（Quinta　学齢11歳）の「予備的空間科」では，平面図形のいろいろな関係を具現化するものとして空間図形を扱い，同時に身の回りの事物との関連が重視しされている．このことをもとにすれば，「空間的直観能力」の養成は「予備的空間科」の重要な指導目標であったことが分かる．それゆえに，従来中等学校の幾何教授で重視されてきた厳密な証明の指導が後退し，生徒の直観力に関連や実際的な測定が重視されたといえる．

要するに，「空間科」は，「空間的直観能力」の養成を担う科目であった．まさに幾何学的な視点から「我々を取り巻く現実的な世界」を観察する能力を養成することが「空間科」の重要な目標であったのである．

Ⅱ　トロイトラインの「メランの要目」批判

トロイトラインは，「予備的空間科」の目的，すなわち「空間的直観能力」の養成という点では十分「メランの要目」を評価する．しかし，その指導内容の配列及び実際の指導方法となると，かなり批判的である．「メランの要目」に対するトロイトラインの批判を取り上げてみよう．

1.「予備的空間科」の期間の問題

まず，トロイトラインが問題とするのは「予備的空間科」の期間である．「メランの要目」ではそれは第Ⅴ学年にだけ配当されており，1年間で終わる指導である．これに対してトロイトラインは，その期間の短さを問題にする．

《「空間的直観能力を形成し強化する」という基本的課題を実現するには，一学年の期間はあまりに短すぎる．それを達成するには少なくとも2学年にわたる期間が必要である．そうすることによって初めて直観能力は実際に基礎的な練習が可能となる．ここで重要なのは特定の知識内容の習得ではなく，精神的な能力，言い換えれば空間的な能力（körperliche Vermörgen）の形成なのである．》[17]，P. 99.

「空間的直観能力」の養成，トロイトラインの言葉で言えば「空間的な能力」の養成を，1年間で行うのは十分ではなく，2半ないし3年間の期間が必要というのがとトロイトラインの見解であった．実際，トロイトラインの「幾何学的直観教授」では，まず基本的な立体図形及び平面図形とその性質が指導され，最後に各平面図形の面積，立体図形の体積が扱われことになっていた．資料4は，2半ないし3年間行われる「幾何学的直観教授」の指導事項を示したものである[17]．

資料4「幾何学的直観教授」の各部の章構成

第1部　立体とそれから導かれる図形（Körper und aus ihnen abgeleitete Gebilden）
- 第1章　立方体（Der Würfel）
- 第2章　正四角柱（Die aufrechte quadratische Säule）
- 第3章　直方体（Der Quader）
- 第4章　直円柱（Die aufrechte Kreiswalze）
- 第5章　球（Die Kugel）
- 第6章　正四面体（Der regelmäßige Vierflächer）
- 第7章　底面が正三角形の三角錐（Die aufrechte Pyramide auf gleichseitigem Dreieck als Grundflächen）
- 第8章　直円錐（Die aufrechte Kreiskegel）
- 第9章　任意の三角形を底面とする三角錐（Die dreiseitige Pyramide auf beliebigem Dreieck）
- 第10章　角錐台（Der Pyramidenstumpf）
- 第11章　四角形（Das Viereck）
- 第12章　円周の長さ（Länge der Kreislinie）

第2部　平面図形の面積（Flächeninhalt ebener Figuren）
- 第1章　面積（Das Flächenmaß）
- 第2章　長方形の面積（Der Inhalt des Rechtecks）
- 第3章　平行四辺形の面積（Der Inhalt des Parallelogramms）

第 4 章　三角形の変形とその面積（Verwandlungen des Dreiecks und sein Inhalt）
第 5 章　台形の変形（Verwandlungen des Trapezes）
第 6 章　四角形の変形とその面積（Verwandlungen des Viereckes und sein Inhalt）
第 7 章　多角形の変形とその面積（Verwandlungen des Vielecks und　sein Inhalt）
第 8 章　平行四辺形の余形（Die Ergänzungsparallelogramme）
第 9 章　長方形と正方形の面積の相等性（Inhaltsgleichheit von Rechteck und Quadrat）
第 10 章　ピタゴラスの定理（Der pythagoreisches Lehrsatz）
第 11 章　ピタゴラスの定理の応用（Anwendungen des pythagoreisches Lehrsatz）
第 12 章　円の面積（Inhalt der Kreisscheibe）
第 3 部　簡単な立体の体積（Rauminhalt der einfacheren Körperformen）
第 1 章　体積及び重量（Raummaße und Gewichte）
第 2 章　角柱の体積（Inhalt von Prismen）
第 3 章　円柱の体積（Inhalt des Kreiszylinders）
第 4 章　角錐の体積（Inhalt von Pyramiden）
第 5 章　円錐の体積（Inhalt des Kreiskegels）

2.「身のまわりの具体物」使用の問題

さらに，トロイトラインが「ギムナジウムの数学教授要目」の指導事項の中で問題にするのは第Ⅴ学年の「予備的空間科」のなかに示された次の一文である（資料 1 下線部参照）.

「空間の広がり，面，線および点を，まず身のまわりの具体物と関係づけながら説明し，そのあと種々の立体について確認する.」

これを次のように批判した.

《私は，空間観察（die Raumbetrachtung）を始めるに当たって，「まず，身のまわりの具体物と関係づけながら説明し，そのあと種々の立体について確認する.」という点に反対しなければならない．身のまわりにあるいろいろな具体物は，我々の授業のねらいや生徒との関係からみれば，いくつかの欠点をもっている．まず，そのような現実的な具体物は，種々雑多な特徴をもつものであり，生徒の興味を分散させ，生徒の集中力を妨げてしまう結果にもなりかねない．その意味で現実的な事物は，思うほど単純なものではないのである．それはその性格上さまざまな視点から観察することはできないから，内的直観（inner Anschauung）を形成するための外的直観（äußer Anschauung）とはなりえない．それは特定の材料で作られており，特定の大きさをもつ事物であるから，純粋な幾何学的対象としてそれを導くことはそれほど簡単ではない．さらに現実的な事物が教室に見いだされたとしても，十分ではない．というのも，予備的幾何教授にとって，事物に生徒が自ら手で触れたり，手に取って扱ったりすることが重要なことであるが，教室にある事物でそれがいつもできるとは限らない．また現実的な事物が単純で操作しやすい物であったとしても，それがはたして我々の指導のねらいに沿うものであるかということは別の問題である.》(17)，S. 100 − 101.

身のまわりの具体物は生徒の集中力の妨げとなったり，場合によっては実際に手にとって観察できない場合がある．また指導のねらいに沿うものが現実に存在するかどうかの保証はない，というのがその理由であった．したがって，実際の指導に当たって，最初は事前に準備された各種の立体模型でなければならない，というのがトロイトラインの主張であった．そのような立体模

型を使うことによって，子どもたちはそれを実際に手に取って操作し，またさまざまな視点から考察することが可能になるというのである．

それでは，「幾何学的直観教授」では立体模型はどのように使われ，指導が展開されるのだろうか．その一部を示すことにする．

3.「幾何学的直観教授」に於ける立体模型

以下に引用したのは，「幾何学的直観教授」の「第1部　立体とそれから導かれる図形」，「第1章　立方体」の最初の部分である（資料4参照）(17)．なお，この資料はトロイトラインが自ら実践した記録であるが，実際の発問だけでなく，そのつど指導上の留意点も同時に記載されている．

資料5「幾何学的直観教授」第1章の内容（抜粋）

第1章　立方体

第1節　置き方

私は遊戯用のサイコロを生徒の目の前に提示する．これは何でしょう？　それはどうしてそう呼ばれるのだろうか？これからサイコロの形をした立体について観察していきましょう．このサイコロよりも大きくて角がきちんとした立方体（1辺が10cm）がここにあります．

この立方体を机の上に置いてごらんなさい．どんな置き方ができますか？いろいろな置き方をしてごらんなさい．その置き方は何種類あるだろうか？この立方体は堅い紙でできています．紙以外でできた立方体を誰か知りませんか？

第2節　面

この立方体の一つの面に手を置きなさい．そして他の面にもう一つの手を置きなさい．

ここで比較のために球を取り出す．球の表面は，立方体の表面と同じですか？本を球の表面に置く場合と立方体の表面に置く場合とでは状況は同じですか？球の表面は曲面と呼ばれ，立方体の表面は平面と呼ばれます．この部屋の中で表面が平面になっているものがありますか？また部屋の外ではどうですか？

さて，机の上に立方体を置きなさい．そして一つの面が自分の正面にくるように立方体を動かしなさい．この位置をこれ以後「基本の位置」と呼ぶことにします．断りがない場合はいつも立方体をこの位置において観察することにしましょう．

上の面に手を置きなさい，今度は右側の面に手を置きなさい．すると全部でいくつの面が立方体にはありますか？これらの面をどう呼んだらいいだろうか？私が今示している面，これは？

自分の手を左側の面に，もう一方の手を右側の面に置きなさい．私がその立方体を取り去ると両手はどのような状態になっていますか？教室の二つの壁は，両手と同じ状態になっていますか？二つの壁以外に，両手と同じような状態になっているものが教室の中にありますか？街の通りではどんなものがありますか？両手と同じような状態になっている二つの面のことを「同方向の平面」(gleichlaufend)，あるいは「平行な平面」といいます．

さて，一方の手を上の面に，もう一方を下の面に添えなさい．次に立方体の前の面と後ろの面に両手を添えなさい．立方体には平行な面が何組ありますか？ここで

私は立方体を取り去る．そこで立方体の左と右の面を想像して，両手を使って二つの面の状態を作りなさい． 同様に上と下の面，前と後ろの面についても同じようにしなさい．このように3回両手を使って空中から一つの立方体を切り取り，「空気立方体」（Luftwürfel）をつくる．

それでは，もっと大きな「空気立体」を自分で作ってみなさい．次に小さな「空気立体」を作りなさい．私もここで「空気立体」を作る．私の「空気立体」で一方の手を上の面に，もう一つの手を下の面に置きなさい．私の「空気立体」で平行となっている面に両手を置きなさい．もう少し大きな「空気立体」を作って，両手を平行となっている面に作りなさい．さらに小さな「空気立体」で，別の平行となっている面に両手を置きなさい．

これは，「幾何学的直観教授」の最初の部分であるが，立方体の導入は身近にあるサイコロが使われているが，最初だけであり，その後は1辺10cm立方体の模型が一貫して使用される．「その立方体模型はどのような置き方があるか，何種類考えられるか」の発問から始まり，まずその立方体の置き方が問題にされる．次に立方体の模型を手で触れさせ，「曲面」との違いに注目させて「平面」との用語が導入される．その後平面となっている身近な物に注目させる．さらに「基本の置き方」（一つの面が正面にくる置き方）を決め，立方体の6つある平面を「前，後，左，右，上，下」を使って命名し，いろいろな角度から観察される．その後左の面と右の面に両手を置き，「平行な面」に注目させ，立方体には何組の「平行な面」があるかが問題にされる．最後に立方体の模型を使わず想像した立方体（「空気立方体」）を使って，「平行な面」を再度学習する．

このように，「立方体」の指導では， 1辺10cmの立方体模型が一貫して使用され，身の回りの具体物に注目はさせているが，それ自体は持ち出されてはいない．さらに最後には，その模型を生徒に想像させ，そこでイメージされた立方体（「空気立方体」）をもとにしながら，図形の学習が展開されている．

それでは，なぜ生徒の身近にある具体物ではなく，立体模型が一貫して用いられるのか．これは「空間的直観能力」の養成に対するトロイトラインの基本的な考え方と関連している問題である．そこで，以下ではトロイトラインの「幾何学的直観教授」についての基本的な考え方を検討しながら，立体模型を一貫して使用する意図について考察したい．

Ⅲ 「幾何学的直観教授」の認識論的背景

1．予備的幾何教授としての「幾何学的直観教授」

前述したように，中等学校の幾何教授は低学年と高学年の幾何教授の二つの段階に分けなければならないというのがトロイトラインの基本的主張である．その低学年（11歳から13歳）の幾何教授をトロイトラインは「幾何学的直観教授」と名づけた．上級学年で指導される所謂「論証幾何」の指導の前にその準備段階として入門的な幾何教授を設けるということは，トロイトラインのみではなく，当時のドイツの数学教育界の大きな課題であった．たとえば1904年のクライン（F. Klein）が提案した「ギムナジウムの数学教授要目」にも「幾何学初歩」という科目が設定されている(7)．前述したように「メランの要目」ではそれが「予備的空間科」として出てきて

いる．しかしトロイトラインの場合，「幾何学的直観教授」はただ上級学年の準備としてではなく，独自の教科として構想した点が従来と異なる点であった．その一般的な指導内容と方法は次のように説明されている．

《低学年の教授は幾何学的直観教授である．幾何学的直観教授では立体図形の観察を基礎としながら，いろいろな幾何的図形を導き，それらを変形したり，新しい図形を作る．目測すること，実測すること（野原に於ても），作図すること，模型を作ることを通して生徒の自己活動を促す．内部的直観及び空間観念を養成し，順次に直観的に認識されたものを上級学年での証明の基礎として形成する．》(17)，S. 75.

これは，具体的な指導内容や指導方法を述べた部分であるが，以下の引用で確認できるように「幾何学的直観教授」で特に重視されたのは「空間的直観能力」(räumliche Anschauungsvermögen) の養成であった．

《さらにもう一つ目標がある．それは一般的教育においても，また実際的な応用においても等しく重視する必要があるという点で最も重要な目標である．その目標とは，メランの要目に述べられている「我々の身のまわりの現象世界を数学的に観察する能力を可能な限り発展させる」ことである．すなわち生徒たちの空間直観能力を形成・強化することである．》(17)，S. 82.

この引用で確認できるように，「空間的直観能力」を養成することを重視する点では，トロイトラインと「メランの要目」は共通している．しかしながら，前述したように指導内容は，トロイトラインの「幾何学的直観教授」は「メランの要目」の「予備的空間科」の指導事項よりも範囲が広く，期間も長い．さらに，もう一つ決定的な違いは，実際の指導に於ける「身のまわりの具体物」の使い方であった．トロイトラインは，意図的に作成された立体模型を使いながらまず指導を進め，その後に身のまわりの具体物を持ち出すべきだという主張である．それでは，なぜ身のまわりの具体物ではなく，立体模型を使って指導を進めるべきなのか．

2.「幾何学的直観教授」における立体模型

そこで，トロイトラインが「幾何学的直観教授」の実際的な指導をもとにしながら，自説を展開している箇所に注目してみたい

《私は次のように主張する．幾何教授のためにまず大きさや材質の異なる立体模型を作成して，授業で用いるのである．これらの模型は観察したり，議論したり，推論したりするための共通の基礎となるものである．その後その模型とよく似た対象物や同じような対象物を生徒の身のまわりから探したり，特徴をとらえ，比較したりする．そうすることによって生徒自身の観念界につくられた形（Formen）は，呼び起こされる（beiziehen）のである．したがって，幾何教授の指導過程を組み立てる際に，例の「ドイツ自然科学者・医者協会」で提案されている観察の順序は逆にすべきであるというのが私の考えである．》(17)，S. 101（下線は引用者）.

この引用にも書かれてあるように，生徒たちは立体模型を手にして，実際にいろいろな角度から観察し，そのいろいろな性質について生徒自身が推測し，自ら確認したりすることができる．たしかに，いろいろな図形の性質を理解させるには，生徒たちに立体模型を持たせ，いろいろな性質を立体模型を通して確認させるほうが効果的であろう．しかし，トロイトラインの立体模型の使用についての主張は，ただ実際の授業の方法論だけの問題にとどまるものではない．というのも，授業の方法論だけの視点からは，最初は立体模型を一貫して使用し，その後身のまわりの具体物に目を向けさせるという主張の必然性が出てこないからである．低学年の幾何教授として「幾何学的直観教授」を提唱したトロイトラインの意図は，2年半ないし3年間の幾何教授を通し

て「空間的直観能力」の養成を行うことであった．立体模型の使用の問題は，より長期的な展望にたった幾何教授の構想の中で考えられたことであり，この問題は，「空間的直観能力」の養成の方法と関連してその主張の意味が考察しなければならない．

そこで，「空間的直観能力」の養成にとって立体模型はどのような意義をもつのか．最後にこの問題を考察することによって，トロイトラインの「幾何学的直観教授」の認識論的背景を探ってみたい．

3.「空間直観能力」の養成と「観察の理論負荷性」

先に引用した箇所にある次の一文にまず注目してみたい（前掲引用の下線部）．
《その後その模型とよく似た対象物や同じような対象物を生徒の身のまわりから探したり，特徴をとらえ，比較したりする．そうすることによって生徒自身の観念界（Vorstellungsgebiet）につくられた形（Formen）は，呼び起こされるのである．》[17]，S. 101.

これによれば，トロイトラインにとって，身のまわりからいろいろな形を探し，それを見出すというのは，既に「観念界」にある形を呼び起こすことと考えられている．「観念界」の原語である Vorstellungsgebiet を直訳すれば，「表象の領域」とでも訳せる内容であるが，各人がもつイメージの世界とでも言い換えてもよかろう．要するに，ある図形が自分のイメージとして存在しない場合，身のまわりの現実世界をいくら観察しても，その図形をそこでは認識できないという考え方である．

このことは，ちょうど医師と我々素人が同じレントゲン写真を見る場合に喩えられるだろう．同じレントゲン写真を見ても，専門的訓練を受けた医師の見方と我々素人とは全く見方が異なる．それは視覚的レベルの違いではなく，見る主体がもつ知識の差の問題である．要するに医師にはそのための専門的知識があり，我々にはないからである．ものを見る際の見方は，それを見る人が持つ知識そのものに依存するという考え方であろう．

これは，廣松渉（1933 − 1994）の言葉を借りれば，「観察の理論負荷性」と呼ばれる考え方であるが，我々が物を見る際，その見え方は万人に共通しているわけではなく，むしろその見え方は個々人がすでに持つ理論（知識）によって変るというものである[4],[5]．さまざまな図形を観念界にすでにもつ個人だからこそ，現実的な世界を観察して，観念界にある図形を呼び起こし，それを認識することができる．このようなトロイトラインの基本的考え方は，「観察の理論負荷性」を基調にしたものであり，少なくとも，身のまわりの現実世界をひたすら観察し，何気なく見る経験を重ねれば，おのずから図形が認識されていくとは考えられてはいない．

したがって，トロイトラインにとって「身近な我々を取り巻く現実的な世界を数学的に観察する能力を可能なかぎり発展させること」を実現するには，まず各種の幾何図形をまず生徒の「観念界」につくることから始めなければならないのである．そのための教具が，立体模型であったといえる．

さらに，実際の指導（資料 5）確認できるように，立体模型は使用されるが，しかし生徒は常にこれを手にしているわけでない，最初使用された立体模型は徐々に使われなくなり，続いて想像上の立体図形（「空気立体」）をもとに指導が進められている．想像上の「空気立体」を使いながら幾何教授を進めるという点もトロイトラインの特徴の一つであるが，これも各種の図形を想像し，念頭で操作する能力を養成のためであり，いわば「観念界」にある図形を動かしたり，変形したりすることが意図されている．そうすることによって，現実的な世界をより柔軟でかつ豊かに数学的に観察する能力の養成がはかられている．

「メランの要目」第Ⅴ学年の「予備的空間科」に対するトロイトラインの批判は，単なる指導方法に関する見解の相違によるものではなく，それはむしろトロイトライン自身の認識論的前提に起因する．したがって，「空間直観能力」の養成を主要な目標とする「幾何学的直観教授」にとって，立体模型による指導から始め，その後身のまわりの具体物と関係づけるという指導の順序は，その目標の達成にとって極めて重要な指導方針といわなければならない．

おわりに

トロイトラインの「メランの要目」批判を取り上げ，「空間的直観能力」の養成の意味を考察した．ここでいう「空間的直観能力」は，我々を取り巻く現実的な世界を数学的に観察する能力とされた．その能力を養成する教具として多用されたのが立体模型であり，それは各種の図形をまず生徒の「観念界」につくることを意図したものであった．いわば，立体模型は，幾何学的概念を説明及び確認のための「道具」なのではなく，むしろ現実の世界を観察するための内的観念としての幾何学的概念を形成するための「道具」と位置付けられているといえる．

前述したように「メランの要目」に示された「予備的空間科」は，トロイトラインの「幾何学的直観教授」は共に中等学校低学年を対象とした幾何教授である．しかしながら，「予備的空間科」が上級学年での幾何教授をスムーズに実行するための準備段階として考えられたのに対して，「幾何学的直観教授」はむしろ低学年の独立した教科として構想されたものである．もちろんそれは上級の学年の幾何教授の準備段階としての側面も持ち合わせてはいるものの，それだけにつきるものではない(19)．中等学校低学年の幾何教授は，上級学年への準備教育か，それとも独自の目的・内容・方法をもった独自の教科かに対する見解の相違が「メランの要目」批判となって現れたものと考えられる．

最後に，本稿での考察をもとにトロイトラインの「幾何学的直観幾何教授」の今日的意義について述べたい．本稿での考察を通して感じたことは，「幾何学的直観幾何教授」が長期的な展望の元に指導計画が作られたという点である．長期的な展望という観点は，現在の算数・数学教育の問題状況を把握し，これからの課題を明確にする上で重要な観点であろう．図形指導の場合で言えば，中学校の図形指導との関係で，小学校６年間の図形指導の課題を見極めることは，極めて重要な問題である．９年間の学校教育の前半６年間での図形指導は，後半の３年間の図形指導へ影響を与えるのは当然のことだからである．今回，立体模型の使用という視点から「幾何学的直観幾何教授」を分析・考察した結果によれば，立体模型は，図形の観念を児童の内部に形成し，最終的に現実的な世界を数学的に観察する能力を養成するための道具として位置付けられている．立体模型を手にして，観察しながら，それらの観念を心の中に形成しようという意図であり，図形の概念や性質を効果的に説明するための道具とはみなされていない．小学校６年間の図形指導を中学校数学科の図形指導の関連を考える時，このトロイトラインの考え方は示唆深い．上級の学年で考察の対象となる基本的な図形の観念，言いかえればその図形に対する広くて豊かなイメージを形成することが，少なくとも小学校の図形指導では重要な課題といえるであろう．

参考文献

(1) D. Behrendsen, E. Götting, *Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen, Unterstuf*e, zweiten Auflage, B. G. Teubner, 1911.
(2) ベーレンゼン・ゲッティング，森外三郎訳『新主義数学』（上巻），文部省，大正 4（1915）年．
(3) 林鶴一・武邊松衛『独逸ニ於ケル数学教育』，大日本図書，大正 10（1921）年．
(4) 廣松渉「科学論の今日的課題と構築」，『思想』，No. 712，2-42 頁，1983.
(5) N. R. ハンソン，野家・渡辺共訳『知覚と発見』，紀伊国屋書店，1982.
(6) 平林一栄『数学教育の活動主義的展開』，東洋館出版，昭和 62（1987）年．
(7) F. Klein, *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen, Tiel 1, von der Organisation des mathematischen Unterrichts*, B. G. Teubner, 1907.
(8) 黒田稔「独逸国に於ける中等数学教授近時の趨勢」，『中等教育』，第 23 号，24-37 頁，大正 3（1914）年．
(9) 黒田稔『数学教授の新思潮』，培風館，昭和 2（1927）年．
(10) 国元東九郎『直観幾何教授の理論と実際』，培風館，大正 14（1925）年．
(11) Peter Krische, Das Begründungproblem in der Raumlehre der Volksschule in seiner historischen Entwicklung. In H-G Steiner hrsg. *Mathematikdidaktik Bildungsgeschichte Wissenschaftsgeschichte* II, Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, S. 77-92, 1990.
(12) 野田直人『国元東九郎の「直観幾何教授」の研究』，熊本大学大学院教育学研究科修士論文，平成 12 年度．平成 12 年 3 月．
(13) ペリー・クライン，丸山哲郎訳『数学教育改革論』（世界教育学選集 70），明治図書，昭和 47（1972）年．
(14) 小倉金之助・鍋島信太郎『現代数学教育史』，大日本図書，昭和 32（1957）年．
(15) Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschenschaftlichen Unterricht*, 36, S. 543-553. 1905,
(16) 柴一実「ドイツにおける 19 世紀末及び 20 世紀初頭の物理教育運動に関する研究（1）」，佐賀大学教育学部紀要，第 37 巻，第 1 号，1-12 頁，平成元（1989）年．
(17) Treutlein, Peter (1911), *Die geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen goemetrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen*. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner.
(18) P. トロイトライン，北川久五郎訳『小学校並び中等学校初年級に於ける直観的空間教授』，南光社，大正 9（1920）年．
(19) 山本信也「幾何学的直観教授の日本的改作」，第 28 回数学教育論文発表会論文集，597-602 頁，1995.
(20) 山本信也「大正期の中学校初学年における幾何教授の議論と実践－国元東九郎の「直観幾何教授」の意義－」，『熊本大学教育学部紀要』（人文科学），第 45 号，13-31 頁，1996.
(21) 山本信也『大正・昭和初期の中学校幾何教授史研究－P.　トロイトラインの「幾何学的直観教授」の受容と定着－』，平成 9 ～ 10 年度科学研究費補助金研究報告書，平成 11 年 3 月．
(22) 山本信也「トロイトラインの「幾何学的直観教授」研究」Ⅲ－「空間的直観能力」の養成と模型－」，第 32 回数学教育論文発表会論文集，155-160 頁，1999.
(23) 山本信也「大正初期に於ける「メランの要目」（1905）の受容－黒田稔の幾何学教科書に於ける「函数的思想」の養成－，『数学教育学研究』（全国数学教育学会），第 6 号，25-33 頁，2000.